Formel von Moivre/Binet für die n-te Fibonacci-Zahl

Eine Fibonacci-Zahl $f(n)$ ist die Summe aus ihren beiden Vorgängern:

(1) $$f(n+1) = f(n) + f(n-1).$$

Man erhält sie aber auch, zumindest näherungsweise, indem man ihren Vorgänger mit etwa 1,6 multipliziert. Dies gilt vor allem für größere Zahlen der Folge. Bei einem konstanten Multiplikationsfaktor würden die Fibonacci-Zahlen eine geometrische Zahlenfolge bilden. Deshalb ist es nicht uninteressant nachzuprüfen, ob sich die n-te Fibonacci-Zahl nicht doch als Potenz

(2) $$f(n) = x^n$$

schreiben lässt. Wir setzen diesen „Ansatz" in die Rekursionsformel (1) ein und erhalten

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1}.$$

Division durch x^{n-1} ergibt

(3) $$x^2 = x + 1$$

oder

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

(4) $$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Da es zwei Lösungen gibt, erfüllt auch die allgemeine Lösung, eine Linearkombination aus x_1 und x_2 mit den Konstanten A und B, die Rekursionsformel (1). Also erweitern wir unseren Ansatz zu

$$f(n) = A x_1^n + B x_2^n.$$

Die Konstanten A und B ergeben sich aus den Bedingungen

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(1) = 1,$$

also

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad A x_1 + B x_2 = 1.$$

Aus der ersten Gleichung gewinnt man $B = -A$. Das ergibt, in die zweite Gleichung eingesetzt,

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2} - A\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

oder

$$A\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1, \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Aus $B = -A$ folgt dann

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Damit wird die gesuchte Formel

(5) $$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(Formel von *Moivre* und *Binet*).